

## Grundlegung der Geometrie in der Primarstufe - einige aktuelle Tendenzen des Geometrieunterrichts

Marianne Grassmann, Erfurt

Ich will in diesem Beitrag versuchen darzustellen, was im Geometrieunterricht der Primarstufe geschieht bzw. geschehen sollte. Umfangreiche statistische Erhebungen sind gerade zum Geometrieunterricht nicht vorhanden, so daß hier nur über Tendenzen, über Absichten, aber natürlich auch über eigene Erfahrungen berichtet werden kann. Dabei sollen vor allem *Probleme* deutlich gemacht werden, mit denen wir es in der Primarstufe zu tun haben. Vielleicht wird so ein wenig sichtbar, warum Kinder am Ende der Primarstufe „nicht mehr so viel wissen wie früher“. Dies ist im übrigen eine Meinung, die uns nicht nur bezüglich der geometrischen Fähigkeiten und Kenntnisse gegenübertritt. So bekommt man ebenso häufig zu hören: „Früher konnten die Kinder besser rechnen.“

### Veränderte Kindheit, veränderte Lernvoraussetzungen gerade für den Geometrieunterricht der Grundschule!?

#### Verständnis „geometrischer“ Begriffe im Vor- und Grundschulalter

Die folgenden zwei kleine Beispiele machen ein generelles Problem deutlich, mit denen wir es im Geometrieunterricht der Grundschule (manchmal nicht nur hier) zu tun haben:

Was ist das?



Wie viele Seiten hat diese Figur?



Was erwarten Sie? Welche Antwort würden Sie geben?

Schauen wir uns Antworten von Kindern im Vor- bzw. Grundschulalter an.

Zur ersten Frage:

Das kann ein Fenster, ein Haus oder gar ein Würfel sein. Das Bild ist für das Kind noch nicht fertig; das Quadrat (oder auch „nur“ Viereck) ist als selbständiges geometrisches Objekt, als Objekt, das eine eigenständige Bedeutung hat und der Betrachtung wert ist, noch nicht in das Bewußtsein des Kindes gedrungen, das geometrische Objekt ist noch an Erscheinungen der realen Welt gebunden.

Zur zweiten Frage:

„Zwei Seiten.“

Dieser Antwort können mindestens zwei Auffassungen zugrunde liegen: Liegt die Figur ausgeschnitten vor, so hat sie eine Vorder- und eine Rückseite. Sonst wird ein „Haus“ gesehen, und das hat neben einem Dach und einem Boden nun einmal zwei Seiten (rechts und links).

Diesen beiden kleinen Beispiele, denen viele hinzugefügt werden können, ist gemeinsam, daß für die Kinder die geometrische Welt in der realen Welt „versteckt“ ist, daß reale Dinge und funktionale Eigenschaften Vorrang gegenüber geometrischen Begriffen haben. Ein Kreis taucht in solchen Objekten wie Rad, Ring, Reifen als gemeinsames Merkmal auf, und die Verwendung des Wortes „Kreis“ bedeutet noch lange nicht, daß auch der Begriff bereits gebildet wurde. Dies ist eine Situation, die uns in der Primarstufe immer wieder gegenübertritt.

Bezüglich der Ziele und Aufgaben des Geometrieunterrichts machen diese kleinen Beispiele deutlich, daß Kinder „sehen“ lernen müssen, daß sie über die Betrachtung von Phänomenen sowie über die handelnde Auseinandersetzung mit der Realität möglichst aspektreiche geometrische Begriffe und Intuitionen erwerben müssen, um die Welt ordnen und beschreiben zu können.

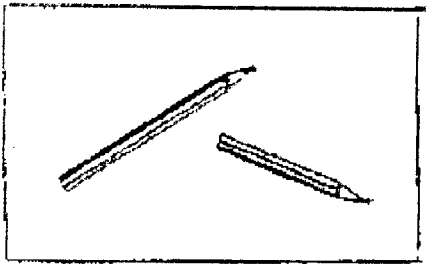
### Veränderte Kindheit - schwierige Schüler? Die Kinder muß man so annehmen, wie sie sind.

#### Zu einigen ausgewählten geometrischen Vorkenntnissen von Schulanfängern

Zu Beginn des Schuljahres 1995/96 haben wir gemeinsam mit tschechischen Kollegen einige geometrisch orientierte Vorkenntnisse von 583 Schulanfängern (317 Jungen, 266 Mädchen) erfaßt, zudem habe ich 21 Interviews geführt. Dabei handelt es sich nicht nur um geometrische Fähigkeiten

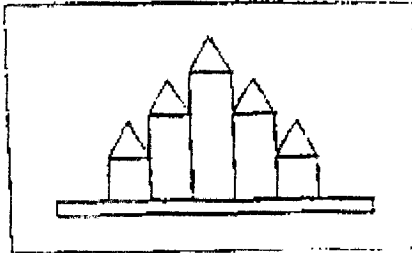
(Begriffskennntnis usw.) im engeren Sinne, sondern um allgemeine Fähigkeiten, die für das Mathematik-Lernen, insbesondere aber für das Lernen von Geometrie wichtig sind.

Hier die Aufgaben:



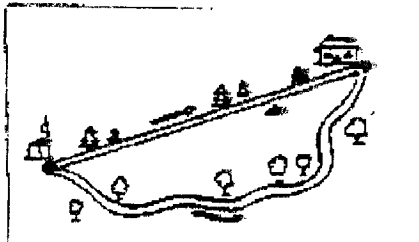
1. Male den kürzeren Bleistift aus.

Hier geht es darum, zu erkunden, inwieweit die Kinder in der Lage sind, aufgrund der visuellen Wahrnehmung, ohne Messen, einen Längenvergleich vorzunehmen.



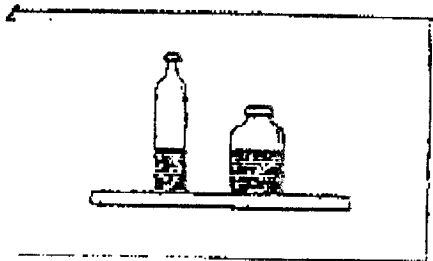
2. Male die Quadrate farbig aus.

Hier geht es um Kenntnis eines speziellen geometrischen Begriffs, um die Frage, ob die Kinder diesen Begriff kennen und Repräsentanten identifizieren können. Diese Aufgabe ist insbesondere im Vergleich der Ergebnisse in Berlin / Brandenburg und Tschechien interessant.



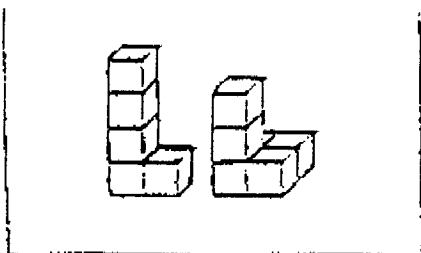
3. Male den längeren Weg aus.

Hier war zu entscheiden, welcher Weg, bei gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt, der längere ist. Es geht also um einen Aspekt der Invarianz des Längenbegriffs.



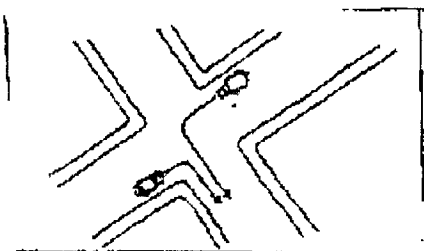
4. In welcher Flasche ist mehr Brause. Male ein Kreuz auf diese Flasche.

Es geht darum, ob die Kinder in der Lage sind, verschiedene Dimensionen (hier Höhe und Breite) gleichzeitig zu berücksichtigen, um letztendlich eine Entscheidung über das Volumen beider Flüssigkeitsmengen zu fällen.



5. Für welchen Bau benötigst du weniger Würfel?

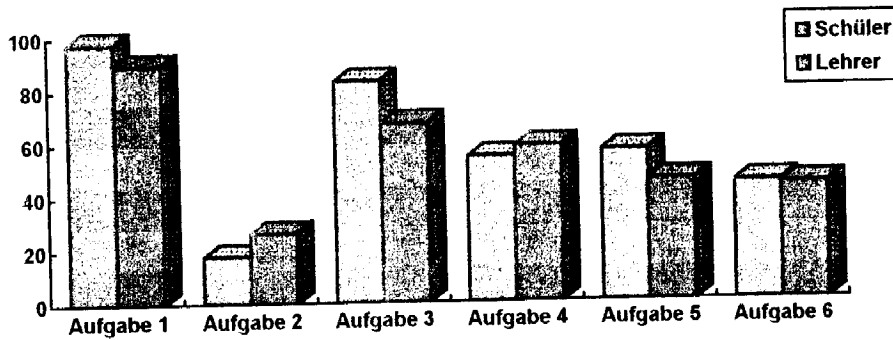
Hier geht es um das Testen eines Aspekts der Raumvorstellung. Auch hier sind von den Kindern mehrere Dimensionen gleichzeitig zu beachten.



6. Welches Auto biegt nach rechts ab? Markiere es.

Hier geht es um die Unterscheidung von rechts und links, eine Fähigkeit, die an vielen Stellen des Mathematikunterrichts immer wieder gefordert wird. Zum anderen müssen die Kinder das zweidimensionale Bild räumlich interpretieren und sich in die Rolle des Autofahrers hineinversetzen.

Wieviel Prozent der Schulanfänger mögen diese Aufgaben wohl bewältigten?  
Die Durchschnittswerte der Schätzungen der Lehrer im Vergleich zu den Leistungen der Kinder können folgender Graphik entnommen werden.



Vergleich Leistungen / Schätzungen

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6
Kinder	97,8 %	18 %	83,5 %	54,7 %	56,6 %	44,3 %
Lehrer	89,7 %	26,5 %	67,4 %	58,5 %	45,3 %	43,3 %

Im Durchschnitt scheinen die Schätzungen der Lehrer den Leistungen der Kinder recht gut zu entsprechen. Schaut man sich aber Kinderleistungen und Lehrerschätzungen genauer an, so werden bei beiden sehr große Differenzen deutlich.

	Lehrer	Klassen
Aufgabe 1	60 bis 100 %	91 bis 100 %
Aufgabe 2	1 bis 90 %	0 bis 69 %
Aufgabe 3	40 bis 100%	67 bis 100 %
Aufgabe 4	10 bis 99 %	29 bis 86 %
Aufgabe 5	1 bis 90 %	22 bis 90 %
Aufgabe 6	5 bis 95 %	4 bis 84 %

Wir können also sowohl Unter- als auch Überschätzungen feststellen, die deutlich machen, wie notwendig es ist, daß die Lehrerinnen und Lehrer ein detailliertes Wissen über die Entwicklung von Grundschulkindern und die Auswirkungen der sich ändernden Kindheit haben. Eine gravierende Unkenntnis über die Entwicklung von Grundschulkindern zeigt sich z. B., wenn die Rechts-Links-Unterscheidung von 95 % der Kinder erwartet wird, wo doch gerade diese Fähigkeit sich erst im Laufe der Grundschulzeit ausbildet, manchmal auch nie. Andererseits ist es wichtig, die Voraussetzungen zu erfassen, um im Unterricht daran anknüpfen zu können. Die festgestellte Heterogenität in den Leistungen der Kinder erlaubt es nicht, sich auf langjährige Erfahrungen zu verlassen. Selbst an ein- und derselben Schule treten zwischen ganzen Klassen große Leistungsunterschiede auf.

An zwei Aufgaben möchte ich die Unterschiede in den Lernvoraussetzungen der Kinder darstellen. Es zeigt sich dabei, daß selbst die richtige Lösung einer Aufgabe keinen Gleichstand in der Entwicklung der Kinder bedeutet.

Aufgabe 2

Diese Aufgabe haben - unseren Erwartungen entsprechend - viele Kinder nicht richtig lösen können. Zunächst einige der häufigsten Fehllösungen:  
Von den 271 Berliner Kindern kreuzten 123 (45,4 %) keine geometrische Figur an, 25 Kinder (9,2 %), alle Rechtecke (einschließlich der Quadrate), 26 Kinder (9,6 %) ein beliebiges (nicht quadratisches) Rechteck, 21 Kinder (7,7 %) ein Dreieck, 6 Kinder (2,2 %) das lange „liegende“ Rechteck und 7 Kinder (2,6 %) ein Rechteck bzw. ein Quadrat mit einem Dreieck.  
Es wird also noch einmal deutlich, daß der Begriff „Quadrat“ im Allgemeinen nicht zum Wissen unserer Schulanfänger gehört, auch wenn vereinzelt Kinder beobachtet wurden, bei denen dieses Wort sogar zum aktiven Sprachschatz gehörte.

Die Antworten der Kinder machen deutlich, daß selbst bei richtigem Identifizieren der Quadrate der Begriff „Quadrat“ nicht gebildet ist, daß Quadrat häufig synonym für Viereck verwendet wird. Begründungen von Kindern für ihre richtigen Entscheidungen lauteten z.B.

„Weil es viereckig ist.“

„Na, weil hier so vier Ecken sind. Man kann Viereck oder Quadrat dazu sagen.“

„Weil hier vier Ecken dran sind.“

Lediglich bei einem Jungen wurde deutlich, daß er eine charakteristische Eigenschaft eines Quadrates im Auge hat, wenn er sagt: „Na weil alle Ecken gleich sind.“ und das in der Mitte liegende Viereck richtig als Rechteck bezeichnet.

Eine ganzheitliche Erfassung von geometrischen Objekten darf also nicht mit der Bildung eines geometrischen Begriffs verwechselt werden, was auch im späteren Unterricht zu beachten ist.

## Aufgabe 5

Erstaunlicherweise gelang es fast allen Kindern problemlos, in dem zweidimensionalen Bild dreidimensionalen Würfelbauten zu sehen, obwohl kein reales Würfelgebäude zum Anfassen und Betrachten vorhanden war. In den Interviews wurde lediglich bei einem Mädchen deutlich, daß es in dieser Beziehung Probleme hatte.

Impulsiv antwortende Kinder stützten sich bei ihrer Entscheidung ausschließlich auf die Höhe der Würfelbauten, auf ein Merkmal, was sofort auffiel. Ein Kind blieb, selbst nachdem es festgestellt hatte, daß für den „kleinen“ Bau 6 und den „großen“ Bau 5 Würfel benötigt wurden, bei seiner falschen Entscheidung, der visuelle Eindruck setzte sich durch.

Begründungen, die die Kinder für ihre (falschen) Entscheidungen gaben, waren z.B.

„Weil der kleiner ist als der.“

„Na weil hier ein Baustein noch fehlt, dann wäre es gleich.“ (Es wurde jeweils auf die Höhe der Bauten gezeigt.)

Zu einer richtigen Entscheidung kamen in der Regel die Kinder, die durch Zählen ein Ergebnis ermittelten. Es gab Klassen, in denen fast alle Kinder nach der Aufgabenstellung zu zählen begannen und demgegenüber Klassen, in denen kaum ein Kind zählte.

Das Zählen half einigen Kindern auch ursprünglich „Falsches“ zu korrigieren, wie die folgende Antwort eines Jungen zeigte:

„Zuerst habe ich gedacht, der hat weniger. Ich dachte, der hat mehr. Der sieht nur kürzer aus als der. Beim Zählen habe ich das gemerkt.“

Ansonsten wurde die Anzahl der Würfel als Begründung angegeben. Nur ein Junge gab im Interview an, daß er auch ohne Zählen sofort zur richtigen Antwort gekommen ist.

„Ich habe gar nicht gezählt. Ich habe gesehen, daß hier mehr sind, weil hier unten (zeigte auf die hinteren Würfel) noch welche sind.“

Als Fazit können wir festhalten, daß die Kinder mit ganz unterschiedlichen geometrischen Kenntnissen und Fähigkeiten zur Schule kommen. Der Unterricht in der Primarstufe muß das berücksichtigen und an die individuellen Lernvoraussetzungen anknüpfen; er muß den Kindern Gelegenheit bieten, ihre individuelle Erfahrungswelt zu erweitern, was eine Differenzierung von Beginn an unumgänglich macht.

## Noch mehr Unterschiede, noch mehr Probleme

Daß die Kindheit sich verändert hat, daß Kinder heute andere Lebenswelten und Erfahrungen haben, ist unbestritten. In vielen pädagogischen Veröffentlichungen kann man etwas zu Schlagworten wie „Medienkindheit“, „Armut im Überfluß“ usw. lesen; aus unterschiedlicher Sicht werden Vor- und Nachteile der „veränderten Kindheit“ dargestellt. Hat sich die Schule genügend auf diese Veränderungen eingestellt? Kann sie das, und wenn, in welchem Umfang? Welche Konsequenzen ergeben sich für einzelne Inhaltsbereiche? Dieser Frage möchte ich bezüglich unseres Gegenstandes, der Geometrie, nachgehen.

Welche Veränderungen bekommen wir insbesondere in der Primarstufe deutlich zu spüren?

Hier sind Auswirkungen vor allem in zwei Komplexen zu nennen, wobei die Wandlungen in Familie und sozialen Beziehungen hier nicht berücksichtigt werden sollen:

Zum Ersten ist es die zunehmende Komplexität und Undurchschaubarkeit der (Lern-)Umwelt.

- Dazu rechne ich insbesondere Veränderungen im Konsumbereich, bei Kindern im Vor- und Grundschulalter denke ich da an Spielzeug. Wie viele Kinder spielen noch mit Bausteinen und

machen dabei ganz elementare Handlungserfahrungen zu Körperformen? Ich kenne keine statistischen Erhebungen, aber Erfahrungen mit Schulanfängern machen ein zunehmendes Defizit an dieser Stelle deutlich. In Ludotheken, wo Kinder das Spielen wieder lernen sollen, wird Holzspielzeug wieder neu entdeckt.

- Weiter ist hier der unkontrollierte Medienkonsum zu nennen. Bereits 1987 hatte mehr als ein Drittel der Grundschul Kinder einen eigenen Fernsehapparat. Die Kinder erfahren nicht mehr die Wirklichkeit, sondern eine bearbeitete Version der Wirklichkeit. Diese adaptierte Wirklichkeit ist zweidimensional und trägt nicht bzw. nur gebunden an eben diese Situation zur Entwicklung von Raumvorstellungen bei. Das gelernte Sehen bezieht sich auf eine ganz spezifische Situation (z.B. Computerspiele) und wird in dieser perfektioniert; die Erfahrungen können nicht auf andere Situationen übertragen werden. Es z. B. gibt Kinder, die sich nicht mehr getrauen, rückwärts zu gehen; alles, was sie wahrnehmen, passiert zweidimensional vor ihnen. Medienkonsum führt zum Mangel an Reflexions- und Aktivitätsanspruch. Die Bilder wechseln so schnell, daß genaues Betrachten, eine Reflexion über das Geschehen gar nicht möglich ist. Als Oberflächenphänomene werden „Konzentrationschwäche“, „zu kurze Aufmerksamkeitsspanne“, „erhöhter Motivationsbedarf“ usw. wahrgenommen. Wie soll man darauf reagieren? Wie ein Computerprogramm („Edutainment“), oder soll man bewußt gegensteuern? Entgegen der Behauptungen der Medienvertreter erfolgt kein Wissensangleich der verschiedenen sozialen Schichten, sondern es verschärfen sich die sozialen Unterschiede, die Wissenskluff wächst. Auch hieraus resultiert eine weitere Heterogenität der Lernvoraussetzungen.

Ein zweiter Komplex betrifft die Gestaltung von Stadt- und Dorflandschaften, die zunehmend kinderfeindlich werden. Dies hat erhebliche Auswirkungen auf geometrische Grunderfahrungen der Kinder.

- Die Kinder werden von einem Ort zum anderen gebracht, da die eigenständige Fortbewegung zu gefährlich ist. Die Folge sind Mängel an Orientierungserfahrungen.
- Die Kinder spielen auf eigens dazu errichteten Plätzen mit vorgefertigtem Material. Handlungserfahrungen, die beim eigenständigen Gestalten von Spielumgebungen, insbesondere über geometrische Eigenschaften von Gegenständen, Lagebeziehungen usw. gewonnen werden, gehen verloren. Wir stellen eine rapide Abnahme von Straßenspielen fest, die eine erhebliche „geometrische Grammatik“ hatten; regionale Unterschiede ändern nicht an der generellen Tendenz.

Ich will an dieser Stelle die Aufzählung negativer Auswirkungen der veränderten Kindheit auf geometrische Lernvoraussetzungen beenden; über positive Aspekte, die Möglichkeiten, die neue Medien bieten, kann sicher auch einiges gesagt werden.

Die Schule kann weder das Fernsehen noch die Gesellschaft im Allgemeinen ändern oder nach ihren vielleicht gar nicht mehr zeitgemäßen Wünschen reparieren, sondern muß die Schüler annehmen und ernstnehmen, wie sie kommen, also auch mit gravierenden Mängeln in geometrischen Grunderfahrungen. Wenn man das ernstnimmt - die Grundschule schickt sich an, dies zu tun - müssen die Kinder auch im Geometrieunterricht die Gelegenheit erhalten, ihre Sinnesempfindungen und ihre visuelle Wahrnehmungsfähigkeit zu schulen, oder, wie Heinrich Bauersfeld sagt, „Kinder müssen das genaue Hinsehen, das von entwickelten Vorstellungen geleitete Beobachten und Erwägen neu lernen.“ Die Kinder müssen Primärerfahrungen im handelnden Umgang mit ihrer „geometrischen“ Umwelt sammeln, das heißt, daß Basteln, Falten, Schneiden, konkret-empirisches Arbeiten zu ganz wichtigen und normalen Bestandteilen des Geometrieunterrichts werden. Mancher wird vielleicht das Fehlen theoretischer Begriffe bemängeln, ich meine aber, daß eine zeitgemäße Grundschule heute bezüglich geometrischer Inhalte viel elementarer als etwa vor 25 Jahren ansetzen muß. Viele Schulanfänger haben nicht einmal den eingangs erwähnten funktionalen Blick auf geometrische Figuren.

Es bleibt die immer wieder gestellte Frage: Soll man dann überhaupt Geometrie in der Grundschule betreiben oder sollen die Kinder nicht lieber „ordentlich Rechnen“ lernen? Für das Unterrichten von Geometrie auch oder gerade angesichts der problematischen Voraussetzungen - wo doch gar keine richtige Mathematik betrieben wird, sehe ich gute Gründe; ich möchte nur auf drei der wichtigsten eingehen, über die es einen breiten Konsens gibt.

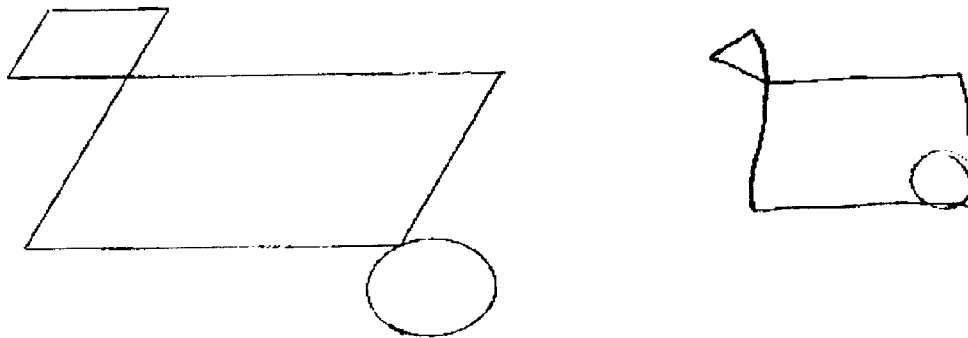
- Die kognitive Entwicklung des Kindes stützt sich in vielen Bereichen auf visuell - geometrische Erfahrungen. Informationen werden über den visuellen Kanal aufgenommen, gespeichert und in der Vorstellung verarbeitet. Spezifische mathematische Denkweisen, wie z.B. das Entdecken von Regeln und Zusammenhängen, das systematische Problemlösen, das mit kreativem Probieren einhergeht, werden gerade durch geometrische Aufgabenstellungen initiiert.
- Grundlegende kognitive Fähigkeiten im Bereich der räumlichen Vorstellung und des räumlichen Denkens, die in vielen Lebensbereichen benötigt werden, werden gefördert. Räumliche Vorstel-

lung ist gerade in der Grundschulzeit trainierbar. Was hier versäumt wird, kann später schwer aufgeholt werden.

- Wie wir anhand der Defizite gesehen haben, helfen geometrische Probleme, Fragestellungen und Erfahrungen den Kindern, ihre Umwelt zu erschließen und sich zu orientieren. Sie entdecken geometrische Beziehungen, Strukturen und Ordnungen, die ihnen bei der Umwelterschließung hilfreich sind. Damit wird bereits eine veränderte Auffassung von Lernen angedeutet: entdeckendes Lernen, Konstruktion eigenen Wissens und Kreativität ist insbesondere an geometrischen Inhalten gut realisierbar; dies möchte ich später an einigen Beispielen zeigen.

Bedenkt man dies alles, so muß festgestellt werden: Das Rechnen ist in der Grundschule ohne Geometrie bodenlos. Vom Zahlenstrahl bis zum Umformen von Kringel- oder Punktfeldern, selbst beim Orientieren auf einer Lehrbuchseite werden geometrische Fähigkeiten ganz selbstverständlich vorausgesetzt. Wenn die Kinder über die notwendigen geometrischen Voraussetzungen verfügen, ist das relativ problemlos. Aber es zeigt sich immer wieder, daß mathematische (rechnerische) Minderleistung (Dyskalkulie) in engem Zusammenhang mit Defiziten in der Raumvorstellung und mit Mängeln im Bereich der visuellen Wahrnehmung einhergeht und häufig hier ihre Ursache hat, da diese Kinder keine Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen ausbilden.

So „kopierte“ ein „rechenschwaches“ Kind das vorgegebene Bild auf folgende Weise:



Hier sind Probleme in der visuellen Wahrnehmung deutlich zu erkennen.

Also: Geometrie ist in der Grundschule unverzichtbar, sie darf nicht nur eine Rolle am Rande spielen, sie hat eine substantiell eigene Bedeutung und nicht nur die Aufgabe, den eigentlichen Geometrieunterricht in der SI vorzubereiten.

Was soll nun im einzelnen erreicht werden, worauf sollte man sich zu Beginn der Sekundarstufe 1 stützen, woran kann man anknüpfen?

## **Ziele, Inhalte und Gestaltungsprinzipien des Geometrieunterrichts der Primarstufe**

Das folgende kann und soll nicht vollständig sein, ich werde mich auf einige Aspekte beschränken und diese durch Beispiele illustrieren. Dabei werde ich immer wieder auf den Würfel eingehen, ein Objekt, das eine wichtige Rolle im Geometrieunterricht der Grundschule spielt.

Aus dem bisher Gesagten ist sicher deutlich geworden, daß der Geometrieunterricht der Primarstufe kein systematischer Lehrgang sein kann, der sich an der Wissenschaft Geometrie orientiert und bei dem es um den Aufbau eines Systems von theoretischen Begriffen geht. Das Geometrie-Curriculum der Primarstufe ist spiralförmig angeordnet; es gibt Themen, die immer wieder auftreten und die zunehmend vertieft behandelt werden.

Was sind nun wichtige Ziele und Inhalte, welche Arbeitsprinzipien und welche Auffassung von Lernen werden favorisiert, was sollte möglichst „herauskommen“?

Ich denke, daß der erste und wichtigste Schwerpunkt, der Ziele, Inhalte und Arbeitsprinzipien gleichermaßen umfaßt, aus dem Bisherigen deutlich wird. Ich will ihn wie folgt formulieren:

Im Geometrieunterricht der Grundschule sollen die Kinder die Gelegenheit erhalten, Erfahrungen zur räumlichen Wirklichkeit zu sammeln, diese sollen *behutsam* „diszipliniert“ werden.

Die Kinder sollen „Sehen lernen“ und die Geometrie als Mittel und Werkzeug zur Strukturierung der Wirklichkeit und zum Ordnen von Raumerfahrungen erleben. Aufgrund der unterschiedlichen Lernvoraussetzungen wird dies individuell sehr unterschiedlich geschehen. Das Unterrichtsangebot muß so sein, daß für jedes Kind eine reflektierte Erweiterung der individuellen Erfahrungswelt möglich ist und daß Aufgaben- und Problemlösungen auf unterschiedlichen Niveaustufen möglich sind. Dabei muß es darum gehen, geometrische Tätigkeiten zu reflektieren und Geometrie zu erlernen, indem Geometrie betrieben wird. Im österreichischen Lehrplan der Volksschule äußert sich dieses Anliegen z.B. in dem immer wieder auftretenden Schwerpunkt.

„Beobachten, Ordnen und Strukturieren von räumlichen Beziehungen und Formen aus der Erlebniswelt der Kinder“

Das soll u.a. durch Feststellen von Eigenschaften einfacher Figuren durch Bauen, Bewegen, Begreifen, Falten, Schneiden, Auslegen ... geschehen. Dabei stehen zunächst solche, in manchen Augen „ungeometrischen“ Eigenschaften wie spitz, stumpf, eckig, krumm, gerade usw. im Vordergrund. Wichtig und charakteristisch für den Anfang ist, daß die Kinder geometrische Objekte (Körper, Figuren) ganzheitlich erfassen, daß charakteristische Eigenschaften nicht von Anfang an isoliert werden können, daß häufig auch funktionale Eigenschaften Vorrang vor den in unserem Sinne eigentlich geometrischen Eigenschaften haben.

Um geometrische Eigenschaften sukzessive zu isolieren, ist es z. B. wichtig, daß auch der Tastsinn angesprochen wird, daß Körper nicht nur angesehen, sondern auch gefühlt werden können. Zur Beschreibung eines nur gefühlten Körpers, den andere aufgrund der Beschreibung identifizieren sollen, werden viel häufiger „isolierte“, den Körper charakterisierende Eigenschaften genannt, als wenn alle den Körper sehen können. Dabei werden auch Eigenschaften angeführt, die man schwerlich wirklich fühlen kann, z.B. daß ein Würfel 12 Kanten hat.

Beim Erwachsenen entsteht aufgrund der Erfahrung, der Generierung eines Gesamtbildes aus vielen Einzelheiten, beim Fühlen ein mentales Bild vom Würfel, und er/sie nutzt bekannte Eigenschaften, um diesen Gegenstand zu beschreiben. Derartige Vorstellungsbilder sind ein Ergebnis eines längeren Prozesses, sie sind Prototypen von Begriffen, sie stimmen in wesentlichen, den jeweiligen Begriff charakterisierenden Eigenschaften überein. (Stellen Sie sich einen Würfel vor! Welche Farbe hat Ihr Würfel?) Diese Prototypen von Begriffen, die Vorstellungen, die zu bestimmten Begriffen gebildet werden, spielen auch im weiteren Geometrieunterricht eine wichtige Rolle. (Zeichnen Sie ein Viereck; stellen Sie sich eine Pyramide vor!) Häufig werden nämlich ganz spezielle Repräsentanten generiert und nicht die jeweils möglichen „allgemeinen“.

Ein Beispiel zu diesem Punkt, das auch zu weiteren noch folgenden Schwerpunkten in Beziehung steht, ist das Bauen mit Würfeln. (vgl. RADATZ/RICKMEYER 1991)

Wir gehen davon aus, daß Kinder in vielfältigen Zusammenhängen Würfel in ihrer Erfahrungswelt erkannt und identifiziert haben, bis hin zu Worten, in denen das Wort „Würfel“ vorkommt. Sie haben beim Bauen mit Würfeln, beim Beschreiben von Gebäuden, die dabei entstanden sind, usw. Erfahrungen gesammelt. Läßt man Kinder im Geometrieunterricht mit Würfeln bauen, gehören die folgenden Aktivitäten dazu:

- Fertige Gebäude sollen beschrieben werden. Was muß man sich merken, um das Gebäude nachbauen zu können? Nach meinen Erfahrungen kommen zunächst verschiedene Vorschläge, die teilweise als unbrauchbar verworfen werden, bevor die Idee entwickelt wird, sich die Anzahl übereinanderstehender Würfel zu merken.
- Pläne anfertigen, nach Plänen bauen; überlegen, wie die fertigen Gebäude aussehen werden.
- freies Bauen, Partnerarbeit.

Das selbständige Anfertigen von Plänen zu einem bereits gebauten Objekt erweist sich immer wieder als besonders schwierig, auch bei Kindern, die über ein recht gut entwickeltes Vorstellungsvermögen verfügen. Was wird bei einem solchen Vorgehen gelernt? Ist das beliebig, hat das seinen Platz im Mathematikunterricht? Ich zähle einige Punkte auf:

- Vergleichen, Sortieren, Ordnen sind elementare Denkprozesse, die für die Mathematik wichtig sind und hier zweifelsfrei geübt werden;
- Verfahren zur Lösung geometrischer Probleme werden deutlich, Beziehungen zwischen Zeichnung und Realität sind immer wieder herzustellen;

- Fähigkeiten der Kommunikation, Entwicklung des sprachlichen Ausdrucksvermögens;
- soziales Lernen;
- Phantasie, Kreativität jedes Kindes werden angesprochen.

Neben den drei letztgenannten übergreifenden, allgemeinen Zielen wird ein wichtiger Beitrag zur Entwicklung der Raumvorstellung geleistet. Das Erkennen von Gebäuden allein auf der Grundlage von Bauplänen verlangt die teilweise Konstruktion eines Körpers in der Vorstellung und stellt daher hohe Anforderungen.

Damit sind wir bei dem eigentlich wichtigsten Ziel des Geometrieunterrichts der Primarstufe:

Die Entwicklung der Raumvorstellung, räumliches Orientieren, Vorstellen und Denken spielen eine zentrale Rolle

Die Fähigkeit zur Raumvorstellung ist eine menschliche Qualifikation von hoher lebenspraktischer Relevanz, die sich nicht im Selbstlauf entwickelt und einer gezielten Schulung und Anregung bedarf. Ich habe bereits darauf hingewiesen, daß die Raumvorstellung insbesondere im Grundschulalter entwickel- und trainierbar ist.

Geometrische Aktivitäten wie die genannten bieten offensichtlich Möglichkeiten zur Entwicklung der Raumvorstellung. Überhaupt sind unter diesem Zielaspekt handlungsorientierte, experimentell-entdeckende Tätigkeiten mit konkretem Material von zentraler Bedeutung. Außer Beispielen zum Bauen und Kippen von Körpern leisten auch die Untersuchung von Parkettierungen, das Auslegen von Figuren, das Tangram-Spiel und viele andere Aufgabenstellungen Beiträge zur Entwicklung der Raumvorstellung. Natürlich ist auch das Anfertigen und Lesen von Zeichnungen hilfreich. Dabei steht nicht nur das Handeln im Vordergrund, sondern die Reflexion, die Beschreibung von Lösungswegen und die Auseinandersetzung mit verschiedenen Lösungen ist ganz wesentlich. Hier sind Grundschulkinder zu ganz erheblichen Leistungen fähig.

Gerade aus der Orientierung auf die Handlungen, aus der Betonung der Entwicklung der Raumvorstellung resultiert manchmal der Eindruck der Beliebigkeit. Geometrische Themen werden in der Alltagspraxis eher als Unterhaltung denn als „richtige“ Mathematik angesehen, was dazu führt, daß sie bei Zeitnot am ehesten vernachlässigt werden. Gerade deshalb erscheint mir folgende Forderung besonders wichtig:

Der Geometrieunterricht der Primarstufe soll an fundamentalen geometrischen Ideen ausgerichtet werden.

Ich möchte mich Heinrich Bauersfeld anschließen. Unter fundamentalen Ideen sind solche zu verstehen, die starke Bezüge zur Wirklichkeit, verschiedene Aspekte und Zugänge haben, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer weiter ausgebaut werden können.

Eine solche zentrale Idee ist die der Symmetrie. Diese tritt im Grundschulunterricht immer wieder auf und wird bis hin zu geometrischen Abbildungen fortgeführt. Dabei reicht die Palette verschiedener Aspekte vom ästhetischen Empfinden bis hin zu arithmetischen Aspekten, wenn wir z.B. an figurale Zahlen denken, etwa achsensymmetrische Punktmuster für gerade Zahlen.

Annette Winning (1989, zitiert nach SCHÜTTE 1991) gibt ein Beispiel an, wie Erstkläßler selbständig Querverbindungen herstellen. Sie nutzt die von den Kindern zur Faschingszeit - intuitiv achsensymmetrisch - hergestellten Masken, um die Kinder an den Begriff der Achsensymmetrie heranzuführen. Nachdem festgestellt wurde, daß manche Masken von beiden Seiten gleich aussehen, gab es bei den Kindern interessante Entdeckungen:

*„Andreas bemerkte: 'Unser neuer Buchstabe (W) ist auch auf beiden Seiten gleich.' Ich griff diese Äußerung später auf und fragte nach weiteren solchen Buchstaben. A, M, O und H wurden genannt. Verena nannte F. Katrin wandte aber sofort ein: 'Der hat doch keine Mitte.' Ich ließ die 'Mitte' bei W, M, O und H einzeichnen. Dann zeigte ich den Kindern, wie man mit einem Spiegel überprüfen kann, ob wirklich 'beide Seiten gleich' sind. Verena probierte, den Spiegel auf das F zu halten, machte dann schnell aus dem F ein E...*

*Mike gab stolz bekannt: 'Ich habe eine Figur mit vier Spiegellinien.' Das war das Quadrat.*



Marcus hatte beim Kreis gerade die beiden Spiegellinien eingezeichnet, die durch das Karomuster vorgegeben waren. Auf Mikes Bemerkung hin zeichnete er zwei weitere. Dann sah er mich verblüfft an und meinte: 'Es gibt noch mehr. Ich glaube tausend.'  
Auch andere Kinder hatten inzwischen gemerkt, daß der Kreis eine besondere Figur ist. Katrin sagte: 'Ich kann den Spiegel hinhalten, wo ich will' und führte es vor; dabei achtete sie darauf, daß er durch den Kreismittelpunkt ging. Sabrina rief: 'Da sind ja überall Spiegellinien!'  
Natürlich wollten die Kinder wissen: 'Wie viele Spiegellinien gibt es denn nun?' Ich zeichnete einen Kreis an die Tafel. Jedes Kind durfte eine Spiegellinie einzeichnen. 'Dazwischen kann man immer wieder neue einzeichnen', erklärte Tim. Marcus korrigierte seine anfängliche Schätzung von tausend Spiegellinie: 'Ich glaube es gibt Hunderttausend oder so.' Katrin meinte: 'Immer wieder eine dazwischen - die kann man nicht zählen.'

Solche Einsichten wird man sicher nicht in jeder Stunde erreichen können. Sie machen aber deutlich, wozu bereits Grundschul Kinder in der Lage sind und wie tragfähig derartige zentrale Ideen sind.

Obwohl wir mit diesem Beispiel eigentlich schon beim nächsten Anliegen des Geometrieunterrichts sind, möchte ich noch auf zwei weitere fundamentale Ideen hinweisen. Da ist zum einen das Messen (Längen- und Flächenmessung, Vorbereitung der Volumenmessung (Würfelgebäude)), zum anderen das Konstruieren und das Problem der Herstellbarkeit geometrischer Gebilde mit bestimmten Eigenschaften und unter bestimmten Bedingungen.

Die Idee des Messens kommt nicht erst ins Spiel, wenn Längen mit dem Lineal gemessen und Flächeninhalte von Rechtecken formelmäßig berechnet werden.

Nebenbemerkung: Wenn ich meine Studenten frage, was ihnen zum Flächeninhalt einfällt, kommt immer zuerst „a mal b“ und manchmal ohne Nachfragen weiter nichts.

Bereits das Ausmalen und das Auslegen und der auf diese Weise vorgenommene Vergleich von Flächen sind wichtige Aspekte des Messens von Flächeninhalten. Beim Zerlegen und Zusammensetzen von Flächen werden Einsichten über die Invarianz von Flächengrößen gewonnen.

Wir kommen zur nächsten Forderung an den Geometrieunterricht:

Der Geometrieunterricht soll durch seine Gestaltung bewußt die gesamte kognitive Entwicklung der Kinder befördern.

Beispiele und Untersuchungen zeigen immer wieder, daß gerade im Geometrieunterricht entscheidend zur Realisierung allgemeiner Ziele des Mathematikunterrichts beigetragen wird, hier bieten sich vielfältige Möglichkeiten aktiv-entdeckenden Lernens.

In der Grundschule kann an die folgenden Grundhaltungen der Kinder angeknüpft bzw. diese sollten wieder geweckt werden:

- natürliche Neugier; die Kinder möchten Neues erfinden, entdecken, herstellen;
- sie fragen nach dem „Warum“, sie wollen sich einen Reim auf Festgestelltes und Gefundenes machen;
- häufig wird nach dem „Wozu“ gefragt, sie wollen mit dem Hergestellten etwas anfangen.

Das bedeutet für den Geometrieunterricht wie möglichst auch den Arithmetikunterricht, daß die Kinder Möglichkeiten

- zum Finden, Erfinden, Herstellen, Entdecken,
- zum Begründen, Argumentieren, Kommunizieren und
- zum Anwenden, Übertragen und Nutzen des Gefundenen

erhalten.

Auch diese Forderungen sprechen sich leichter aus, als sie in der alltäglichen Unterrichtspraxis umgesetzt werden. Ich möchte wiederum am Beispiel des Würfels demonstrieren, wie eine Umsetzung aussehen kann und dabei wiederum deutlich machen, wie wichtig Material und konkrete Handlungen sind.

Wissen Sie auf Anhieb, wie viele unterschiedliche Würfelnetze es gibt? Bekämen Sie ohne weiteres alle 11 zusammen? Können Sie sich vorstellen, daß und wie Viertkläßler diese Aufgabe vollständig bewältigen?

Wir haben es mehrfach erlebt, wie erfolgreich und mit wieviel Freude sich Viertkläßler dieser Aufgabe widmen. Dabei ist es bei dieser und ähnlichen Aufgabenstellungen ganz wichtig, daß sie eine natürliche Differenzierung ermöglichen, daß die Kinder ihr Arbeitstempo selbst bestimmen können und daß

jeder die Aufgabe seinem Entwicklungsstand und seinen speziellen Fähigkeiten entsprechend lösen kann und daß schließlich ein Austausch möglich und notwendig ist.

Besonders erfolgreich waren die Kinder, wenn sie geeignetes Material (Polydron) in die Hand bekommen. Einige hatten bereits nach 15 Minuten alle Würfelnetze gefunden; dabei waren bald systematische Lösungsstrategien (Versetzen eines Randvierecks) zu beobachten. Manche Kinder hatten mehr als 11 Netze gefunden und erkannten in der Auseinandersetzung mit den anderen, wann zwei Netze „gleich“ sind. Die Kinder unterschieden sich deutlich darin, ob sie die Bewegungen im Kopf ausführten oder Identitäten durch reale Bewegungen erkannten. Jedes Kind machte einen Schritt bei der Entwicklung seiner Raumvorstellung.

Es ist wichtig, nicht beim „einfachen“ Finden stehenzubleiben. Es soll darüber diskutiert werden, warum es nicht mehr Netze geben kann, warum manche Quadratsechslinge keine Würfelnetze sind und wie man systematisch alle Anordnungen von sechs Quadraten findet.

Bei einem solchen Vorgehen lernen die Kinder Eigenschaften von Flächen und Körpern genauer kennen, was dann in einer Begriffserklärung zusammengefaßt werden kann.

Nicht zu vernachlässigen ist die Freude, die die Kinder am Ausprobieren und Entdecken haben. Es ist uns noch nie begegnet, daß Kinder anderen vorhielten, daß sie mehr Netze gefunden hätten.

Weitere Anliegen und Ziele des Geometrieunterrichts will ich nur nennen und nicht näher darauf eingehen. Dazu zählen die Integration mit anderen Fächern (Sprache, Kunst, ...), die Entwicklung von Zeichenfähigkeiten (Freihandzeichnen) sowie das Verzahnen mit arithmetischen Inhalten.

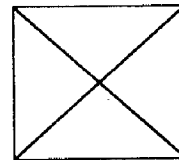
Ein abschließendes Beispiel soll noch einmal Möglichkeiten, die der Geometrieunterricht zur Entwicklung kognitiver Fähigkeiten bieten kann, aufzeigen.

### Experimentieren im Geometrieunterricht

Ganz im Sinne der zuletzt erhobenen Forderung und um die Entwicklung der Raumvorstellung zu fördern, müssen geometrische Körper und das freie, phantasiefördernde Experimentieren mit Körpern und Figuren einen größeren Raum einnehmen. Angeregt durch einen kleinen Beitrag von RUDOLF KEBLER (1989) aus Siegen habe ich von Kindern und von Studierenden mehrfach folgenden Auftrag bearbeiten lassen.

#### Experimentierauftrag

1. Was für ein Körper entsteht, wenn Du  
-- ein Quadrat zweimal zu einem Tuch faltest,  
-- eine Faltlinie bis zur Mitte aufschneidest,  
-- und so faltest, daß die Dreiecke 1 und 2 übereinander liegen?  
Überlege zuerst und schreibe Deine Vermutung auf!



Vermutung:

2. Falte dann und klebe die beiden Dreiecke übereinander!

War Deine Vermutung richtig?

3. Schreibe Eigenschaften des entstandenen Körpers auf!

Die Seitenflächen sind:

Die Grundfläche ist:

\_\_\_\_\_ Ecken.

\_\_\_\_\_ Kanten.

4. Aus wie vielen dieser Faltfiguren kann man einen Würfel zusammensetzen?

Vermute!

Baut gemeinsam einen Würfel aus Faltfiguren!

War Deine Vermutung richtig?

5. Versucht gemeinsam, weitere Figuren aus Faltfiguren zusammenzusetzen! Gebt Euren Figuren einen Namen!

Vollziehen wir doch einmal in Gedanken den Weg von der ebenen Figur „Quadrat“ über die Dreiecks-

pyramide bis zum Würfel (daß es sich nicht um eine „richtige“ Pyramide handelt, da die Grundfläche fehlt, bereitete den Kindern keine Schwierigkeiten). Wie viele Dreieckspyramiden muß man zusammensetzen, um einen Würfel zu erhalten.

Es wird vielleicht deutlich, welche Anforderungen an das räumliche Denken gestellt werden. Einige Studierende, die bei einem Unterrichtsversuch anwesend waren, meinten, daß dies für Viertkläßler viel zu schwer sei. In der Auswertung dieses Experiments wich diese Einschätzung dem Erstaunen über die Phantasie, Leistungsfähigkeit und Kreativität der Kinder.

Einige Kinder vermuteten, daß ein Dreieck entsteht; es fiel ihnen schwer, gedanklich zu erfassen, daß aus einer ebenen Figur ein räumliches Gebilde entstehen kann. Das Beschreiben der Eigenschaften bereitete keinerlei Schwierigkeiten, spezielle Eigenschaften der begrenzenden Dreiecke wurden aber seltener angegeben.

Für die Kinder war nun interessant, aus wie vielen Pyramiden ein Würfel zusammengebaut werden kann. Dies führte zu angeregten Diskussionen und zum Probieren. Dabei traten ganz unterschiedliche Vermutungen auf: 2 Pyramiden (jedes Kind hatte zwei Quadrate erhalten), 8 Pyramiden (Anzahl der Ecken des Würfels). Die richtige Anzahl (4) wurde meist durch Experimentieren und nur selten durch rein gedankliches Operieren gefunden. Hier fand eine Kontrolle und Korrektur der Vorstellungen in der Realität statt.

Schließlich zeigten die Kinder erstaunliche Phantasie und Kreativität bei der Herstellung von Phantasiefiguren. Es zeigte sich, daß alle Kinder in der Lage waren, Beziehungen zwischen geometrischen Objekten und der sie umgebenden Realität herzustellen und geometrische Figuren in die Realität „hineinzusehen“. Die nicht immer standfesten Gebilde wurden stolz im abschließenden Kreis präsentiert.

Die Kinder wählten folgende Bezeichnungen für ihre Objekte: Brückentor, Brücke, Stadion, Schleife, vierteilige Tragetasche, Turm, Krokodil, UFO, Partyzelt, offene Pyramide mit Dach... Können Sie sich diese Objekte vorstellen? Dabei wurden unterschiedliche Interessen und Fähigkeiten deutlich.

Zum Abschluß waren die Kinder interessiert zu erfahren, wozu der Sand benötigt wurde, den sie besorgt hatten. Nachdem die Kinder herausgefunden hatten, daß vier Pyramiden zum Bau eines Würfels benötigt werden, wurde die Frage gestellt, wie viele Pyramiden voll Sand denn benötigt werden, um den Würfel ganz mit Sand zu füllen. Es ging also auf anschaulichem Niveau um einen Volumenvergleich. Es war nicht erstaunlich, daß die Mehrzahl der Kinder wie auch viele Studenten der nahe liegenden Meinung waren, daß vier Pyramiden voll Sand ausreichen. Einige Kinder meinten fünf, nur weil sie etwas anderes als die meisten sagen wollten. Es gab aber einige, die sofort erkannten, daß ein Hohlraum in der „Mitte“ des Würfels bleibt, daß man also mehr als vier, vielleicht fünf oder sechs Pyramiden voll Sand benötigen wird.

„Na wenn man die Pyramiden mit Sand gefüllt hat und dann eine Folie darüber klebt, bleibt etwas frei, was so groß ist wie zwei Pyramiden“ stellte ein Kind fest. Völlig überrascht haben mich zwei Kinder, die den Restkörper ganz genau beschreiben konnten:

„Der muß vier Seiten haben und jede Seite ist so groß wie die Grundfläche einer Pyramide.“ Der Restkörper ist also ein Tetraeder; dies hatten diese Kinder sofort „gesehen“. In Unkenntnis des Namens für die Restfigur gab das Mädchen eine gute Beschreibung ab.

Man könnte ein solches Vorgehen auch in der SI nutzen, um auf eine kurze, elegante Weise eine Formel für das Volumen eines Tetraeders herzuleiten; warum soll man nicht auch hier von Handlungen ausgehen.

Soweit das abschließende Beispiel.

Im Geometrieunterricht der Grundschule geht es also darum, immer wieder Lernsituationen zu schaffen, die die Kinder zum genauen Beobachten, zum Herstellen, zum Erfinden, zum Beschreiben und Argumentieren sowie zum Fragen nach Gründen anregen. Im Geometrieunterricht kann an greif- und vorstellbaren Gebilden zur Entwicklung wichtiger allgemeingeistiger Fähigkeiten (Ordnen, Klassifizieren, Symbolisieren) beigetragen werden. Es ist also kein Geometrieunterricht, in dem abfragbare Definitionen und Sätze behandelt werden. Er bereitet den nachfolgenden systematischen Geometrieunterricht also weniger durch Wissen als vielmehr durch eine Sensibilisierung für geometrische Fragen vor, dazu gehört auch die Freude an der Auseinandersetzung mit derartigen Fragen. Es wäre sehr schön, wenn diese Sensibilisierung auch später weiter gefördert und nicht durch einen angeblich strengen Unterricht zerschlagen wird, wie es mir bei einer Fünftkläßlerin jüngst begegnet ist. Sie hatte in der Grundschule begeistert an der Lösung geometrischer Probleme gearbeitet; jetzt haßt sie die Geometrie, weil sie Begriffe lernen und unverstandene Konstruktionen nachvollziehen muß.

Literatur:

- BAUERSFELD, H. (1976) Was soll Geometrie in der Grundschule? in: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* H. 8
- BAUERSFELD, H. (1993) Drei Gründe, geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern, in: *math. did.* 16/ Bd. 1
- GRASSMANN, M. (1996) Geometrische Fähigkeiten der Schulanfänger, in: *Grundschulunterricht* H. 5
- GRASSMANN, M. (1996a) Wir haben „Krokodil, Zelt, Entenschnabel, UFO ... gebaut“ - Was so alles beim Experimentieren im Geometrieunterricht zutage treten kann, in: *Grundschulunterricht* H. 11
- KEßLER, R. (1989) Räumliche Gebilde im Geometrieunterricht der Primarstufe - eine Auswahl; In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*; Franzbecker, Hildesheim
- MAIER, H.-P. (1994) *Räumliches Vorstellungsvermögen - Komponenten, geschlechtsspezifische Differenzen; Relevanz, Entwicklung und Realisierung in der Realschule*; Verlag Peter Lang; Frankfurt/Main
- RADATZ, H. & RICKMEYER, K. (1991) *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*; Schroedel, Hannover
- SCHÜTTE, S. (1994) *Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen; Probleme und Perspektiven der Grundschulmathematik heute*; Klett; Stuttgart
- SCHWEIGER, F. (1992) Fundamentale Ideen - Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik, in: *JDM* H. 2/3

Prof. Marianne Grassmann

Pädagogische Hochschule Erfurt  
Institut für Grundschulpädagogik und Kindheitsforschung  
Nordhäuser Straße 63  
D - 99089 Erfurt, Deutschland

Neue Anschrift:  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich 15, Institut für Didaktik der Mathematik  
Einsteinstraße 62  
D 48149 Münster  
grassma@uni-muenster.de